فاصله‌های علامت‌دار و نامساوی اردوش ـ موردل

محمد طبیعی
دانشجوی عمران دانشگاه صنعتی شریف

مقدمه

پل اردوش[1]، ریاضیدان مجاری قرن بیستم است که بیشتر در زمینهٔ ترکیبیات فعالیت داشت. نبوغ وی از همان دوران کودکی هم آشکار بود، به گونه‌ای که در سه سالگی توانست با اعداد نسبتاً بزرگ، محاسبات ریاضی انجام دهد. او همچنین نخستین مقالهٔ خود را در زمانی که تنها ۱۸ سال داشت، نوشت.

اردوش در دوران حیات بیش از هر کس دیگری در تمام طول تاریخ ریاضیات مقاله منتشر کرده است. ثمرهٔ تلاش‌های او انتشار بیش از ۱۵۰۰ مقاله و کتاب است که آن‌ها را به تنهایی یا با همکاری دیگران به رشتهٔ تحریر درآورده است.

در سال ۱۹۳۵ اردوش یک نامساوی هندسی با صورتی بسیار جالب مطرح می‌کند. دو سال بعد ریاضیدانی به نام **موردل**[2] اثباتی نه‌چندان ساده برای آن ارائه می‌دهد و به این ترتیب نام این نامساوی، «نامساوی اردوش ـ موردل» می‌شود. صورت این نامساوی از این قرار است:

از نقطهٔ دلخواه P در مثلث ABC به رئوس آن متصل می‌کنیم تا سه مثلث PAB، PAC و PBC تشکیل شوند. اگر PL، PN و PM به ترتیب ارتفاعات نظیر رأس P در این سه مثلث باشند، آن‌گاه:

$$PA+PB+PC\geq 2(PM+PN+PL)$$

بعد از این، آوردن روش‌های خلاقانه برای اثبات این نامساوی به یک دغدغه و چالش جالب برای علاقه‌مندان به هندسه تبدیل شد و در طول این سال‌ها، راه‌حل‌های زیادی برای آن ارائه شده‌اند و حتی به صورت‌های مختلفی تعمیم داده شده است. به‌عنوان مثالی از این تعمیم‌ها می‌توان به «نامساوی بارو»[3] اشاره کرد که در آن به جای ارتفاعات سه مثلث داخلی، نیم‌سازهای آن‌ها در نظر گرفته می‌شود و باز هم همان نامساوی برقرار است. در این مقاله هم نویسنده سعی داشته است یکی از این تعمیم‌ها را به شیوه‌ای بدیع ثابت کند.

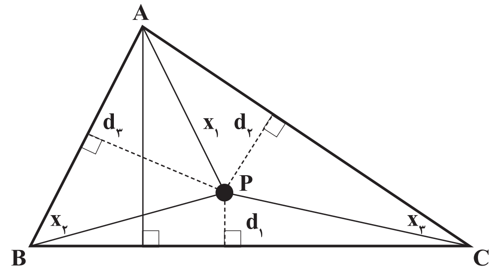
ما با استفاده از فاصله‌های علامت‌دار از اضلاع مثلث یک نامساوی را ثابت می‌کنیم و از آن، نامساوی اردوش ـ موردل را به عنوان یک نتیجهٔ ساده به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید P یک نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ مثلث ABC باشد. فاصلهٔ P تا رئوس A، B و C را با x_1، x_2 و x_3 و فاصله‌های علامت‌دار P تا اضلاع BC، CA و AB را به ترتیب با d_1، d_2 و d_3 نمایش دهید. a، b و c را طول این اضلاع در نظر بگیرید. ما یک نامساوی را انتخاب می‌کنیم که از آن نامساوی مشهور اردوش ـ موردل به آسانی نتیجه می‌شود.

قضیه:

$$x_1+x_2+x_3\geq\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)d_1+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)d_2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)d_3 \qquad (1)$$

تساوی تنها زمانی برقرار است که P مرکز دایرهٔ محیطی ABC باشد.



اثبات: فرض کنید h_1 طول ارتفاع وارد از A بر BC و Δ مساحت ABC باشد. روشن است که:

$$2\Delta=ah_1=ad_1+bd_2+cd_3$$

توجه کنید که: $x_1+d_1\ge h_1$. این نامساوی اگر $d_1<0$ باشد نیز برقرار است (زمانی که P یک نقطه داخل مثلث نباشد). همچنین تساوی تنها زمانی برقرار است که P نقطه‌ای روی ارتفاع رأس A باشد. حال داریم:

$ax_1+ad_1\ge ah_1=ad_1+bd_2+cd_3$ یا:

$$(۲)\quad ax_1\ge bd_2+cd_3$$

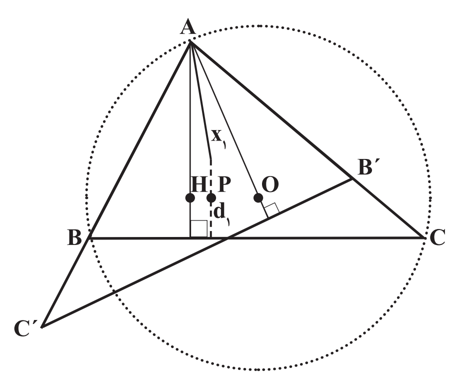
اگر نامساوی (۲) را در مثلث $AB'C'$ (قرینهٔ مثلث ABC نسبت به نیم‌ساز زاویهٔ A از مثلث ABC) به‌کار بریم، آن‌گاه به‌دست می‌آوریم:

$$ax_1\ge cd_2+bd_3$$

یا:

$$(۳)\quad x_1\ge \frac{c}{a}d_2+\frac{b}{a}d_3$$

تساوی تنها زمانی برقرار است که P روی ارتفاع رأس A از مثلث $AB'C'$ قرار داشته باشد (خطی که از A و مرکز دایرهٔ محیطی ABC می‌گذرد).



به‌طور مشابه به‌دست می‌آوریم:

$$(۴)\quad x_2\ge \frac{a}{b}d_3+\frac{c}{b}d_1$$

$$(۵)\quad x_3\ge \frac{b}{c}d_1+\frac{a}{c}d_2$$

و با جمع (۳)، (۴) و (۵) نامساوی (۱) را به‌دست می‌آوریم. تساوی تنها زمانی برقرار است که P مرکز دایرهٔ محیطی ABC باشد.

اگر P یک نقطه داخل $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد، آن‌گاه $d_1,d_2,d_3>0$. حال از آنجا که $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2$ و $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\ge 2$ و $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ داریم:

$$x_1+x_2+x_3>2(d_1+d_2+d_3)$$

این نامساوی مشهور اردوش ـ موردل است. تساوی تنها زمانی برقرار است که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد و P مرکز دایرهٔ محیطی آن باشد. اثبات‌های بسیار زیادی برای نامساوی اردوش ـ موردل وجود دارند. در اثبات اصلی موردل نامساوی (۱) با فرض $d_1,d_2,d_3>0$ اثبات شده بود. با این حال، اثبات ما شفاف‌تر است و تمام مکان‌های P را پوشش می‌دهد.

***منبع**

مقالهٔ «Signed distances and the Erdos-Mordell inequality»، از مجلهٔ Forum Geometricorum، جلد ۴، سال ۲۰۰۴، به قلم Nikolaos Dergiades

***پی‌نوشت‌ها**

1. Paul Erdos
2. Louis Joel Mordell
3. Barrow's inequality

پرسش‌های بیکارجو!

؟

۱۵ تیم والیبال در یک تورنمنت با هم بازی می‌کنند و هر تیم با هر تیم دیگر یک بازی برگزار می‌کند. معلوم شد هر تیم در هفت بازی برنده شده است. چند گروه شامل سه تیم می‌توان پیدا کرد که در هر گروه، هرتیم فقط یک‌بار برنده شده باشد؟

الف) ۱۲۰

ب) ۱۴۰

ج) ۱۰۰

د) ۱۵۰

هـ) ۲۲۰

۴